Cześć I. Zadania za 5 punkty

1. Znaleźć 99 ułamków zwykłych $\frac{m}{n}$, $m, n \in N$ takich, że $\frac{1}{4} < \frac{m}{n} < \frac{1}{3}$.
2. Dla jakich k całkowitych wyrażenie $\frac{k^3 - k^2 + 2}{k-1}$ jest liczbą całkowitą?
3. Wszystkie ściany sześcianu wykonanego z drewna pomalowano na czerwono. Następnie rozcięto ten sześcian na 64 jednakowe „sześcianiki". Ile „sześcianików" ma pomalowane:
   a) 3 ściany b) 2 ściany c) 1 ścianę d) ani jednej ściany
4. Wyznaczyć *m* tak, aby wykresy funkcji $y = x - 2$, $y = \frac{1}{3}x$, $y = mx - m + 2$ przecinały się w jednym punkcie.
5. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 11. Jeśli przestawimy w niej cyfry, to otrzymamy liczbę o 27 większą. Znaleźć tę liczbę.
6. Wykazać, że liczba $A = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ jest liczbą całkowitą.
7. Towar o łącznej masie 46 ton przywieziono do sklepu trzynastoma ciężarówkami o ładowności 3 i 4 ton. Ile było ciężarówek mniejszych, a ile większych, jeżeli każdą z nich wykorzystano maksymalnie.
8. Dany jest trapez *ABCD*, w którym $AB \parallel CD$ *i* $|AB| > |CD|$. Wiedząc, że stosunek pola trapezu *ABCD* do pola trójkąta *ABC* wynosi *s*, wykazać, że stosunek długości podstaw trapezu jest równy *s -1*.
9. Sprawdzić, czy liczby $A = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ i $B = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}$ są liczbami wzajemnie odwrotnymi.
10. Wykazać, że jeśli $a > 2$ *i* $b < 1$ to spełniona jest nierówność $ab + 2 < a + 2b$
11. Dla jakich wartości *b* prosta $y = -x + b$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostokątem wyznaczonym przez układ nierówności: $-1 \le x \le 3$ *i* $0 \le y \le 2$
12. Długości krawędzi prostopadłościanu wyrażają się liczbami naturalnymi. Jedna ze ścian ma pole 18 cm^2, druga 45 cm^2. Ile wynosi objętość prostopadłościanu?
13. Wyznaczyć taką liczby *a,* dla których wartość wyrażenia $\frac{a}{\sqrt{2} - 1} - \sqrt{2}$ jest liczbą wymierną.
14. Wyznaczyć liczby pierwsze *x i y* dla których zachodzi równość *4x+y=xy*.
15. Cena biletu na mecz piłkarski wynosiła 150 zł. Gdy cenę obniżono okazało się, że na mecze przychodzi o 50% widzów więcej, a dochód uzyskany ze sprzedaży biletów na jeden mecz wzrósł o 25%. O ile obniżono cenę biletu?
16. Udowodnić, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego do boków tego trójkąta jest równa wysokości trójkąta.
17. Wiedząc, że $2a^2 + 2b^2 = 5ab$ i $a > b > 0$ obliczyć $\frac{a+b}{a-b}$.
18. Jaką liczbą, niewymierną czy całkowitą, jest liczba
    $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$?

19. Punkt (x, y) nazywamy kratowym jeśli obie jego współrzędne są liczbami całkowitymi. Zaznaczyć w układzie współrzędnych OXY zbiór punktów spełniających warunek $|x|+|y|\le 2$. Ile punków kratowych należy do tego zbioru?
20. W kwadracie o boku długości *a* poprowadzono przekątne, które podzieliły tą figurę na cztery trójkąty. W każdy trójkąt wpisano okrąg. Obliczyć pole wielokąta, którego wierzchołki są środkami okręgów.
21. Wykazać, że liczba $4+4^2+4^3+...+4^{2012}$ jest podzielna przez 20.
22. Liczy rzeczywiste *a, b, c, d* i *e* spełniają układ nierówności: $a+b<c+d,\ b+c<d+e,\ c+d<e+a,\ d+e<a+b.$ Znaleźć w zbiorze $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ liczbę najmniejszą i największą.
23. Uporządkować rosnąco liczby dodatnie *a, b* i *c* spełniające warunki: $\frac{c}{a+b}=2$ i $\frac{c}{a-b}=3$
24. Przy dzieleniu liczb *a, b* i *c* przez 5 otrzymujemy odpowiednio reszty 2, 3 i 4. Znaleźć resztą z dzielenia sumy kwadratów liczby *a, b* i *c* przez 5.
25. Przeprowadzić dyskusję rozwiązalności układu równań $\begin{cases} mx+y=1 \\ 4x+my=m \end{cases}$ w zależności od parametru *m*.
26. Wykazać, że dla $a\ne 1,\ b\ne 1,\ c\ne 1$ spełniona jest nierówność $a^2+b^2+c^2+3>2(a+b+c)$
27. Dane są liczby całkowite *a* i *b*. Wykazać, że jeśli liczby *a-5* i *b-4* dzielą się przez 13, to liczba *2a+3b+4* też dzieli się przez 13.
28. Znaleźć wszystkie funkcje liniowe spełniające warunek $2f(x)+3f(1-x)=4x-1$
29. Wykazać, że $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{10}}>10$
30. Liczby rzeczywiste dodatnie spełniają warunek $a+b+c=abc$. Wykazać, że *ab>1* i *bc>1* i *ac>1*.
31. Trójkąt ma boki długości *2n+1* i *n+4* i *4n – 2*, gdzie *n* jest liczbą naturalną większą od 2. Dla jakich liczb naturalnych istnieje taki trójkąt?
32. Dla jakich wartości parametru *k* i *m* obrazem punktu $P=(3k^2+1,\ m)$ w symetrii względem osi *OX* jest punkt $P'=(k+1,\ 3)$

Cześć II. Zadania za 8 punktów

1. Obliczyć sumę wszystkich liczb naturalnych należących do przedziału $\langle 101,\ 200\rangle$

2. Dla jakich wartości parametru *m* równanie $|2x+1|+|x-2|=m$ ma dokładnie dwa rozwiązania?

3. Dwa okręgi o promieniach *r* i *R* są styczne zewnętrznie. Odległość punktu styczności od wspólnej stycznej wynosi *d*. Wykazać, że $\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{2}{d}$

4. Liczby rzeczywiste *a, b i c* spełniają układ nierówności $|a|\ge|b+c|$, $|b|\ge|c+a|$, $|c|\ge|a+b|$. Udowodnić, że *a+b+c=0*

5. Wewnątrz kąta $\alpha = 60°$ znajduje się punkt M odległy o 2 i 11 jednostek od ramion kąta. Wyznaczyć odległość punktu M od wierzchołka kąta.

6. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich *a*, *b i c* spełniona jest nierówność $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$

7. Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste *a*, *b i c* spełniają warunek $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ac$, to $a = b = c$.

8. Wykazać, że liczba $A = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2} \in W$

9. Wiedząc, że $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ i $g(x) = \sqrt{x^2+4}$ wykazać, że $f\left(a+\frac{1}{a}\right)+g\left(a-\frac{1}{a}\right) = 2a$ dla $a > 1$